物理問題　I

$M >> m, \mu$ とする。

(1)

$\boxed{ア}$ $\dfrac{GMmr}{R^3}$ $\boxed{イ}$ $2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$

解説

$\boxed{ア}$

半径 r の球と地球との相似比は r ： R だから，質量比は r^3 ： R^3 である。

よって，半径 r の球の質量は $M\cdot\left(\dfrac{r}{R}\right)^3$

ゆえに，点 P において質点に働く重力の大きさは $\dfrac{GmM\left(\dfrac{r}{R}\right)^3}{r^2}=\dfrac{GmMr}{R^3}$

$\boxed{イ}$

O を原点とし，右向きに r 軸をとると，質点が受ける重力（復元力） F は，

$r>0$ のとき $F<0$， $r<0$ のとき $F>0$ だから， $F=-\dfrac{GMm}{R^3}r$

よって，質点の加速度を a_m とすると，その運動方程式は $ma=-\dfrac{GMm}{R^3}r$

ゆえに，質点は O を振動中心とし，周期 $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\dfrac{GMm}{R^3}}}=2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$ の単振動をする。

(2)

$\boxed{ウ}$ $\sqrt{2GM\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R+h}\right)}$ $\boxed{エ}$ $\sqrt{GM\left(\dfrac{3}{R}-\dfrac{2}{R+h}\right)}$ $\boxed{オ}$ $\left|\dfrac{\mu-m}{\mu+m}\right|\sqrt{GM\left(\dfrac{3}{R}-\dfrac{2}{R+h}\right)}$

$\boxed{カ}$ $\dfrac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{GM\left(\dfrac{3}{R}-\dfrac{2}{R+h}\right)}$

解説

$\boxed{ウ}$

重力の位置エネルギーの基準位置を無限遠にとり，質点 A がトンネルに入る瞬間の速度を v_{AR} とすると，質点 A が地表からの高さ h の位置にあるときとトンネルに入る瞬間における力学的エネルギー保存則の式は $0+\left(-\dfrac{GM\mu}{R+h}\right)=\dfrac{1}{2}\mu v_{\mathrm{AR}}{}^2+\left(-\dfrac{GM\mu}{R}\right)$

よって， $|v_{\mathrm{AR}}|=\sqrt{2GM\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R+h}\right)}$

別解

重力の位置エネルギーの基準位置を O にとり，

質点 A が地表にあるときの重力の位置エネルギーを U_R

地表からの高さ h にあるときの位置エネルギーを U_{R+h} とすると，

$U_{R+h}-U_R$ は質点 A を地表から地表からの高さ h まで移動させるときに外力がする仕事と等しい。

これと $r>R$ のとき質点 A に働く万有引力の大きさは $\dfrac{GM\mu}{r^2}$ であることから，

$$U_{R+h}-U_R=\int_R^{R+h}\frac{GM\mu}{r^2}dr\equiv\left[-\frac{GM\mu}{r}\right]_R^{R+h}=GM\mu\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$$

よって，$\dfrac{1}{2}\mu v_{\mathrm{AR}}{}^2+U_{\mathrm{R}}=0+U_{R+h}$ および $|v_{\mathrm{AR}}|=\sqrt{2GM\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R+h}\right)}$ より，

$$|v_{\mathrm{AR}}|=\sqrt{2GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)}$$

$\boxed{\text{エ}}$

解法 1：単振動運動の視点からの力学的エネルギー保存則で解く

質点 A がトンネルに入ってからは O を振動中心とする単振動運動になる。

質点 A の単振動運動の運動方程式は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$の解法と同様にして，

その加速度を a_{A} とすると $\mu a_{\mathrm{A}}=-\dfrac{GM\mu}{R^3}r$

よって，質点 A が O に到達する直前の速度を v_{AO} とすると，

単振動運動の力学的エネルギー保存則の式 $\dfrac{1}{2}\dfrac{GM\mu}{R^3}R^2+\dfrac{1}{2}\mu v_{\mathrm{AR}}{}^2=0+\dfrac{1}{2}\mu v_{\mathrm{AO}}{}^2$

および $|v_{\mathrm{AR}}|=\sqrt{2GM\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R+h}\right)}$ より，

$$\begin{aligned}|v_{\mathrm{AO}}|&=\sqrt{\frac{GM}{R}+v_{\mathrm{AR}}{}^2}\\&=\sqrt{\frac{GM}{R}+2GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)}\\&=\sqrt{GM\left(\frac{3}{R}-\frac{2}{R+h}\right)}\end{aligned}$$

解法 2：重力の視点からの力学的エネルギー保存則で解く

中心 O を位置エネルギーの基準位置にとると，

地表における質点 A の重力の位置エネルギー＝

質点 A を O から地表まで移動させるときに外力がする仕事

これと $0 \le r \le R$ のとき，質点 A に働く重力の大きさが $\dfrac{GM\mu}{R^3}r$ であることから，

地表における質点 A の重力の位置エネルギーは $\displaystyle\int_0^R \frac{GM\mu}{R^3} r dr = \left[\frac{GM\mu}{2R^3}r^2\right]_0^R = \frac{GM\mu}{2R}$

よって，力学的エネルギー保存則の式 $\dfrac{GM\mu}{2R} + \dfrac{1}{2}\mu v_{AR}{}^2 = 0 + \dfrac{1}{2}\mu v_{\mathrm{AO}}{}^2$

および $|v_{\mathrm{AR}}| = \sqrt{2GM\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R+h}\right)}$ より，$|v_{\mathrm{AO}}| = \sqrt{GM\left(\dfrac{3}{R} - \dfrac{2}{R+h}\right)}$

オ・カ

衝突直後の質点 A の速度を v_{AO}'，質点 B の速度を v_{BO}' とすると，

弾性衝突だから，$\dfrac{v_{\mathrm{AO}}' - v_{\mathrm{BO}}'}{v_{\mathrm{AO}} - 0} = -1 \quad \therefore v_{\mathrm{BO}}' = v_{\mathrm{AO}}' + v_{\mathrm{AO}}$ ・・・①

衝突直前と直後で運動量が保存されるから，$\mu v_{\mathrm{AO}} = \mu v_{\mathrm{AO}}' + m v_{\mathrm{BO}}'$ ・・・②

①を②に代入し，整理すると，$v_{\mathrm{AO}}' = \dfrac{\mu - m}{\mu + m} v_{\mathrm{AO}}$ ・・・③

よって，

$$
\begin{aligned}
|v_{\mathrm{AO}}'| &= \left|\frac{\mu - m}{\mu + m} v_{\mathrm{AO}}\right| \\
&= \left|\frac{\mu - m}{\mu + m}\right| |v_{\mathrm{AO}}| \\
&= \left|\frac{\mu - m}{\mu + m}\right| \sqrt{GM\left(\frac{3}{R} - \frac{2}{R+h}\right)}
\end{aligned}
$$
・・・オ

①，③より，

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{BO}}' &= v_{\mathrm{AO}}' + v_{\mathrm{AO}} \\
&= \left(\frac{\mu - m}{\mu + m} + 1\right) v_{\mathrm{AO}} \\
&= \frac{2\mu}{\mu + m} v_{\mathrm{AO}}
\end{aligned}
$$

よって，$|v_{\mathrm{BO}}'| = \dfrac{2\mu}{\mu + m}\sqrt{GM\left(\dfrac{3}{R} - \dfrac{2}{R+h}\right)}$ ・・・カ

問 1

地表から飛び出す瞬間の質点 B の速度を v_{BR} とすると，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{BR}}}^2+\frac{GMm}{2R}=\frac{1}{2}m\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{GM\left(\frac{3}{R}-\frac{2}{R}\right)}\right)^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{BR}}}^2=\frac{GMm}{2R}\left\{\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2-1\right\} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

また，無限遠方に飛び去るための条件は，$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{BR}}}^2-\frac{GMm}{R}\geq 0 \quad \cdot\cdot\cdot ②$

①，②より，$\frac{GMm}{2R}\left\{\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2-1\right\}-\frac{GMm}{R}\geq 0$

これと $\frac{GMm}{2R}\left\{\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2-1\right\}-\frac{GMm}{R}=\frac{GMm}{2R}\left\{\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2-3\right\}$ より，$\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2\geq 3$

よって，$\frac{2\mu}{\mu+m}\geq\sqrt{3} \quad \therefore \frac{\mu}{m}\geq 2\sqrt{3}+3 \quad \cdot\cdot\cdot$ (答)

補足 1

質点 B の速度の万有引力と平行な成分の運動エネルギーは万有引力の仕事を受けるので減少するが，質点 B の速度の万有引力と垂直な成分の運動エネルギーは万有引力の仕事を受けないので変化しない。

補足（楽だが記述上面倒になるので補足とした）

中心 O を位置エネルギーの基準位置とすると，
無限遠の位置エネルギーは中心 O に対する地表の位置エネルギーと
地表に対する無限遠の位置エネルギーの和で与えられるから，

$$\frac{GMm}{2R}+\lim_{h\to\infty}\left\{GMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)\right\}=\frac{GMm}{2R}+\frac{GMm}{R}=\frac{3GMm}{2R}$$

よって，満たすべき条件は $\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{BO}}'}^2+0\geq\frac{3GMm}{2R}$

これと $|v_{\mathrm{BO}}'|=\frac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{GM\left(\frac{3}{R}-\frac{2}{R}\right)}=\frac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{\frac{GM}{R}}$ より，

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2\frac{GM}{R}\geq\frac{3GMm}{2R} \quad \therefore \frac{2\mu}{\mu+m}\geq\sqrt{3}$$

ゆえに、$\frac{\mu}{m}\geq 2\sqrt{3}+3 \quad \cdot\cdot\cdot$ (答)

(3)

$\boxed{キ}$ $\dfrac{GMm}{R^3}x$ $\boxed{ク}$ $\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$

解説

$\boxed{キ}$

力の大きさを$|F_x|$とすると，

$$|F_x| = \frac{GMm}{R^3}r\sin\angle\mathrm{POO'}$$
$$= \frac{GMm}{R^3}r\cdot\frac{x}{r}$$
$$= \frac{GMm}{R^3}x$$

$\boxed{ク}$

$\boxed{キ}$および運動が地表で静止した状態から始まることから，質点の運動は

地表を振動端点，O' を振動中心とする周期$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\dfrac{GMm}{R^3}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$ の単振動であり，

反対側の地表に出るまでかかる時間は$\dfrac{1}{2}$周期だから，その時間は$\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$

(4)

$\boxed{ケ}$ m $\boxed{コ}$ $\left(2\sqrt{33}+11\right)m$

解説

$\boxed{ケ}$

解法 1：運動量保存則と単振動運動から解く

衝突直前の質点 A の速度をV_{A}，

衝突直後の質点 A と質点 B の速度をそれぞれV_{A}'，V_{B}とすると，

衝突直前と直後の運動量保存則より，$\mu V_{\mathrm{A}} = \mu V_{\mathrm{A}}' + mV_{\mathrm{B}}$ ・・・①

弾性衝突だから，$\dfrac{V_{\mathrm{A}}' - V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}} = -1$ $\therefore -V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{A}}' - V_{\mathrm{B}}$ ・・・②

①$-\mu\times$② より，$V_{\mathrm{B}} = \dfrac{2\mu}{\mu+m}V_{\mathrm{A}}$ ・・・③

質点 A の運動を O' を振動中心とする単振動と見なすと，$|F_x| = \dfrac{GM\mu}{R^3}x$ より，

質点 A の単振動の位置エネルギーは$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{GM\mu}{R^3}x^2$ と表わせ，

質点 A が地表にあるときは $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$ だから，その位置エネルギーは $\dfrac{3GM\mu}{8R}$ となる。

よって，力学的エネルギー保存則より，$\dfrac{1}{2}\mu V_{\mathrm{A}}{}^2=\dfrac{3GM\mu}{8R}$　$\therefore V_{\mathrm{A}}{}^2=\dfrac{3GM}{4R}$　・・・④

ゆえに，③と④より，衝突直後の質点 B の運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}mV_{\mathrm{B}}{}^2=\dfrac{3GM\mu^2 m}{2(\mu+m)^2 R}$

質点 B が地表にあるときの位置エネルギーは，A と同様にして，$\dfrac{3GMm}{8R}$

よって，満たすべき条件は $\dfrac{3GM\mu^2 m}{2(\mu+m)^2 R}\geq\dfrac{3GMm}{8R}$，すなわち $\left(\dfrac{\mu}{\mu+m}\right)^2\geq\dfrac{1}{4}$

これと $\dfrac{\mu}{\mu+m}>0$ より，$\dfrac{\mu}{\mu+m}\geq\dfrac{1}{2}$　$\therefore \mu\geq m$

補足：点 O を基準位置とした万有引力位置エネルギーから $V_{\mathrm{A}}{}^2$ を求めると

質点 A が O から距離 r にあるとき質点 A が受ける万有引力は $\dfrac{G\left(\dfrac{r}{R}\right)^3 M\mu}{r^2}=\dfrac{GM\mu}{R^3}r$

よって，O からの距離が a であるときの万有引力の位置エネルギーを U_a とすると，外力が万有引力にした仕事（正の仕事）と等しいから，

$$U_a=\int_0^a\frac{GM\mu}{R^3}r\,dr=\left[\frac{GM\mu}{2R^3}r^2\right]_0^a=\frac{GM\mu}{2R^3}a^2$$

これより，質点 A が O' にあるときと地表にあるときの位置エネルギーはそれぞれ

$$U_{\frac{R}{2}}=\frac{GM\mu}{2R^3}\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{GM\mu}{8R},\quad U_R=\frac{GM\mu}{2R^3}R^2=\frac{GM\mu}{2R}$$

よって，$\dfrac{1}{2}\mu V_{\mathrm{A}}{}^2+\dfrac{GM\mu}{8R}=0+\dfrac{GM\mu}{2R}$　$\therefore V_{\mathrm{A}}{}^2=\dfrac{3GM}{4R}$

あるいは，

$U_R-U_{\frac{R}{2}}=\displaystyle\int_{\frac{R}{2}}^{R}\frac{GM\mu}{R^3}r\,dr=\left[\frac{GM\mu}{2R^3}r^2\right]_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{3GM\mu}{8R}$ より，$\dfrac{1}{2}\mu V_{\mathrm{A}}{}^2-0=\dfrac{3GM\mu}{8R}$　$\therefore V_{\mathrm{A}}{}^2=\dfrac{3GM}{4R}$

解法 2：力学的エネルギーと弾性衝突から解く

質点 B の運動を O' を振動中心とする単振動と見なすと，$\left|F_x\right| = \dfrac{GMm}{R^3}x$ より，

質点 B の単振動の位置エネルギーは $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{GMm}{R^3}x^2$ だから，

質点 B が地表にあるときの位置エネルギーは，$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$ より，$\dfrac{3GMm}{8R}$

よって，衝突直後の質点 B の速さを v_B とすると，

$\dfrac{1}{2}m{v_\mathrm{B}}^2 \geq \dfrac{3GMm}{8R}$ すなわち ${v_\mathrm{B}}^2 \geq \dfrac{3GM}{4R}$ となればよい。

質点 A の運動も O' を振動中心とする単振動と見なし，衝突直前の速さを v_A とすると，
力学的エネルギー保存則より，

$\dfrac{1}{2}\mu{v_\mathrm{A}}^2 = \dfrac{3GM\mu}{8R} \quad \therefore {v_\mathrm{A}}^2 = \dfrac{3GM}{4R}$

$\mu = m$ のとき

弾性衝突の性質より，衝突直前と直後で質点 A の速さと質点 B の速さが交換される。
※証明は簡単だが覚えておくこと

よって，${v_\mathrm{B}}^2 = {v_\mathrm{A}}^2 = \dfrac{3GM}{4R}$ より，${v_\mathrm{B}}^2 \geq \dfrac{3GM}{4R}$ を満たす。

$\mu > m$ のとき

$v_\mathrm{B} > v_\mathrm{A}$ となるのは明らかだから，${v_\mathrm{B}}^2 > {v_\mathrm{A}}^2 = \dfrac{3GM}{4R}$

よって，${v_\mathrm{B}}^2 \geq \dfrac{3GM}{4R}$ を満たす。

$\mu < m$ のとき

$v_\mathrm{B} < v_\mathrm{A}$ となるのは明らかだから，${v_\mathrm{B}}^2 < {v_\mathrm{A}}^2 = \dfrac{3GM}{4R}$

よって，${v_\mathrm{B}}^2 \geq \dfrac{3GM}{4R}$ を満たさない。

以上より，$\mu \geq m$ であればよい。

補足

解法 1 より楽だが，$\boxed{\text{コ}}$のことを考慮すると，この解法は適切ではない。

$\boxed{コ}$

質点 B が地表から飛び出すときの速度を V_{BR} とし，

万有引力の位置エネルギーの基準位置を無限遠にとると，

質点 B が地再び地表にもどってくるための条件は $\frac{1}{2}mV_{BR}{}^2-\frac{GMm}{R}<0$

$$\frac{1}{2}mV_{BR}{}^2<\frac{GMm}{R} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

また，質点 B の運動を O' を振動中心とする単振動と見なすと，

地表の質点 B と衝突直後の質点 B についての力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mV_{BR}{}^2+\frac{3GMm}{8R}=\frac{1}{2}mV_B{}^2 \qquad \therefore \frac{1}{2}mV_{BR}{}^2=\frac{1}{2}mV_B{}^2-\frac{3GMm}{8R} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

ここで，$\boxed{ケ}$の解法 1 の③$\left(V_B=\frac{2\mu}{\mu+m}V_A\right)$と④$\left(V_A{}^2=\frac{3GM}{4R}\right)$より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mV_B{}^2&=\frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2V_A{}^2\\&=2m\cdot\left(\frac{\mu}{\mu+m}\right)^2\cdot\frac{3GM}{4R}\\&=m\cdot\left(\frac{\mu}{\mu+m}\right)^2\cdot\frac{3GM}{2R}\end{aligned}$$

これと②より，

$$\frac{1}{2}mV_{BR}{}^2=m\cdot\left(\frac{\mu}{\mu+m}\right)^2\cdot\frac{3GM}{2R}-\frac{3GMm}{8R} \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

①，③より，

$$m\cdot\left(\frac{\mu}{\mu+m}\right)^2\cdot\frac{3GM}{2R}-\frac{3GMm}{8R}<\frac{GMm}{R} \qquad \left(\frac{\mu}{\mu+m}\right)^2<\frac{11}{12}$$

これと $\frac{\mu}{\mu+m}>0$ より，$\frac{\mu}{\mu+m}<\frac{\sqrt{33}}{6} \qquad \therefore \mu<\left(2\sqrt{33}+11\right)m$

問 2

質点 B が地球を飛び出した瞬間の速度を v_{BR} ,
地球から最も離れた瞬間の速度とそのときの O からの距離をそれぞれ v_{Br} ， r とすると，
力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_{BR}}^2+\left(-\frac{GMm}{R}\right)=\frac{1}{2}m{v_{Br}}^2+\left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

これと $\frac{1}{2}m{v_{BR}}^2=\frac{GMm}{2R}$ より，

$$\frac{1}{2}m{v_{Br}}^2-\frac{GMm}{r}+\frac{GMm}{2R}=0 \quad ・・・①$$

地球を飛び出した瞬間の質点 B の速度の向きと中心 O 方向のなす鋭角は 30°
地球から最も離れた瞬間の質点 B の地球中心方向の速度成分は 0 だから，
v_{Br} と中心 O 方向のなす角は 90° になる（放物運動の最高点と同じ状況）。
これと面積速度一定の法則から，

$$\frac{1}{2}r|v_{Br}|\sin 90^\circ=\frac{1}{2}R|v_{BR}|\sin 30^\circ \quad \therefore |v_{Br}|=\frac{R}{2r}|v_{BR}|$$

これと $\frac{1}{2}m{v_{BR}}^2=\frac{GMm}{2R}$ より，

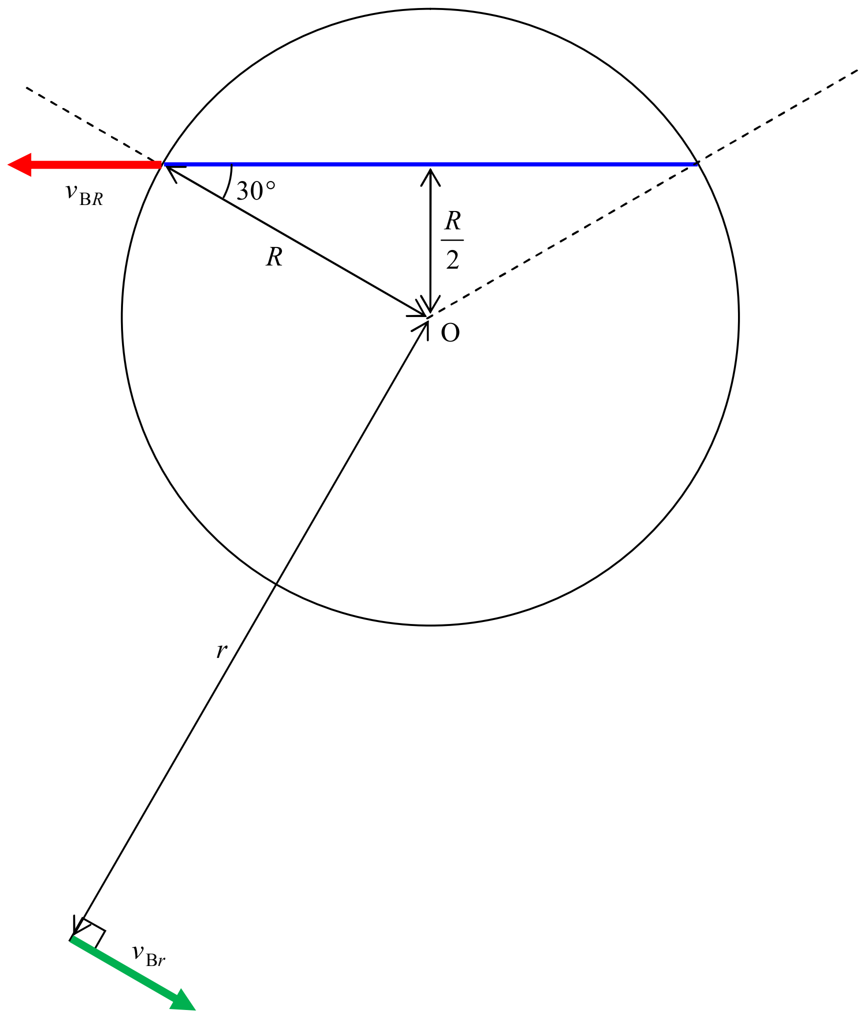
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m{v_{Br}}^2&=\frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2r}v_{BR}\right)^2\\&=\frac{R^2}{4r^2}\cdot\frac{1}{2}m{v_{BR}}^2\\&=\frac{R^2}{4r^2}\cdot\frac{GMm}{2R}\\&=\frac{GMmR}{8r^2}\end{aligned}$$

これを①に代入すると， $\frac{GMmR}{8r^2}-\frac{GMm}{r}+\frac{GMm}{2R}=0 \quad \therefore \frac{R}{8r^2}-\frac{1}{r}+\frac{1}{2R}=0$

両辺に $8Rr^2$ 倍し， r について整理すると， $4r^2-8Rr+R^2=0$

これと $r>0$ より， $r=\frac{2+\sqrt{3}}{2}R$ ・・・(答)

参考図



万有引力を受ける速度成分は 0 になるから $v_{Br} \cdot \vec{r} = 0$ になる。

注意

等速円運動となるためには，$m \cdot \frac{{v_{Br}}^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$ となることが必要である。

このとき力学的エネルギー保存則の式 $\frac{1}{2}m{v_{BR}}^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{1}{2}m{v_{Br}}^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right)$

および $\frac{1}{2}m{v_{BR}}^2 = \frac{GMm}{2R}$，$\frac{1}{2}m{v_{Br}}^2 = \frac{GMm}{2r}$ より，$\frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$　$\therefore R = r$

$R \neq r$ より不適

よって，$v_{Br} \cdot \vec{r} = 0$ となるのは一瞬であり，質点 B の運動は等速円運動とはならない。

物理問題　Ⅱ

(1)

イ $\dfrac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$　ロ $\dfrac{q^2(d+\Delta d)}{2\varepsilon_0 S}$　ハ $\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$

解説

イ

$$W=\frac{q^2}{2C}=\frac{q^2}{2\frac{\varepsilon_0 S}{d}}=\frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

(2)

ニ $\dfrac{\varepsilon_0 V^2}{2d^2}\cdot\dfrac{S_1 {S_2}^2}{(S_1+S_2)^2}$　ホ $\sqrt{2}-1$　ヘ $V=2\left(\sqrt{2}+1\right)d\sqrt{\dfrac{pg}{\varepsilon_0}}$

解説

ニ

解法例 1：ハを利用して解く

面積 S_1，面積 S_2 のコンデンサーの電気容量をそれぞれ C_1， C_2 とすると，

$C_1=\dfrac{\varepsilon_0 S_1}{d}$， $C_2=\dfrac{\varepsilon_0 S_2}{d}$ のコンデンサーの直列回路だから，その合成容量は

$$\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{\frac{{\varepsilon_0}^2 S_1S_2}{d^2}}{\frac{\varepsilon_0(S_1+S_2)}{d}}=\frac{\varepsilon_0 S_1S_2}{d(S_1+S_2)}$$

よって，各極板に蓄えられた電荷量を $|Q|$ とすると，

$$|Q|=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}V=\frac{\varepsilon_0 S_1S_2}{d(S_1+S_2)}V$$

これとハより，極板③と極板④が引き合う力の大きさは，

$$\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S_1}=\frac{1}{2\varepsilon_0 S_1}\left\{\frac{\varepsilon_0 S_1S_2}{d(S_1+S_2)}V\right\}^2=\frac{\varepsilon_0 V^2}{2d^2}\cdot\frac{S_1{S_2}^2}{(S_1+S_2)^2}$$

解法例 2：$\boxed{ハ}$を利用しないで解く

極板③に蓄えられた電荷を Q （$Q>0$），極板③がつくる電界の強さを E とすると，

$$E=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S_1}$$

極板④に蓄えられた電荷は $-Q$ だから，

極板③と極板④が引き合う力の大きさは $QE=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S_1}$

これと

$$\begin{aligned}Q&=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}V\\&=\frac{\varepsilon_0 S_1 S_2}{d\left(S_1+S_2\right)}V\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S_1}&=\frac{1}{2\varepsilon_0 S_1}\left\{\frac{\varepsilon_0 S_1 S_2}{d\left(S_1+S_2\right)}V\right\}^2\\&=\frac{\varepsilon_0 V^2}{2d^2}\cdot\frac{S_1 {S_2}^2}{\left(S_1+S_2\right)^2}\end{aligned}$$

解法例 3：$\boxed{ハ}$を利用しないで解く

面積 S_1 のコンデンサーの電圧を V_1 とすると，$V_1=\dfrac{C_2}{C_1+C_2}V=\dfrac{S_2}{S_1+S_2}V$ ・・・①

また，面積 S_1 のコンデンサーの 1 枚の極板がつくる電界の強さを E_1 とすると，

極板間の電界の強さは $2E_1$ だから，$V_1=2E_1 d$ $\therefore E_1=\dfrac{V_1}{2d}$ ・・・②

①，②より，$E_1=\dfrac{S_2}{2d\left(S_1+S_2\right)}V$

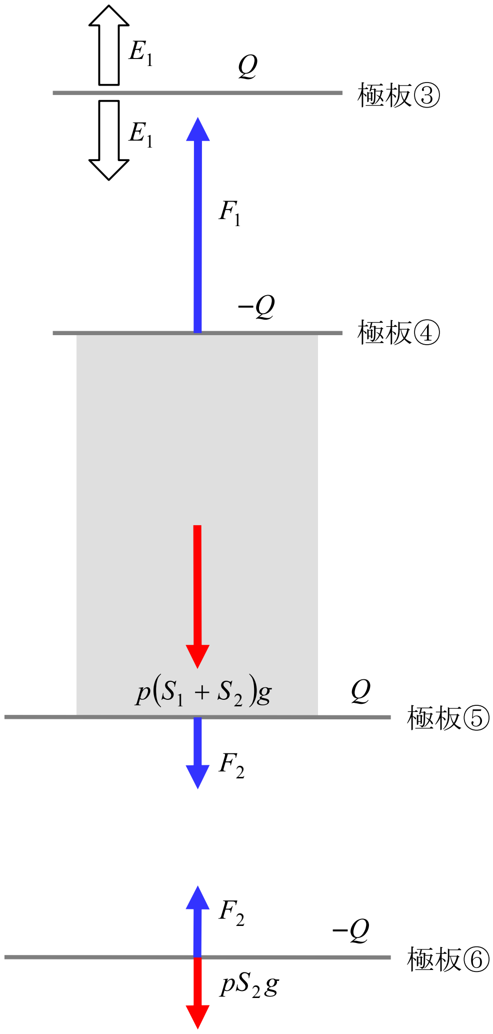
また，極板に蓄えられた電荷量を $|Q|$ とすると，

$$\begin{aligned}|Q|&=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}V\\&=\frac{\varepsilon_0 S_1 S_2}{d\left(S_1+S_2\right)}V\end{aligned}$$

よって，極板③と極板④が引き合う力の大きさは

$$\begin{aligned}|Q|E_1&=\frac{\varepsilon_0 S_1 S_2}{d\left(S_1+S_2\right)}V\cdot\frac{S_2}{2d\left(S_1+S_2\right)}V\\&=\frac{\varepsilon_0 V^2}{2d^2}\cdot\frac{S_1 {S_2}^2}{\left(S_1+S_2\right)^2}\end{aligned}$$

ホ



面積 S_1，面積 S_2 のコンデンサーの極板間の引力の大きさをそれぞれ F_1，F_2 とすると，

極板④と⑤の一体部分に働く力のつり合いは $F_1 = p(S_1+S_2)g + F_2$ ・・・①

極板⑥に働く力のつり合いは $F_2 = pS_2 g$ ・・・②

①に②を代入し整理すると，$F_1 = p(S_1+2S_2)g$

よって，$\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{S_1+2S_2}{S_2}$ ・・・③

一方，$\boxed{\text{ニ}}$より，$F_1 = \dfrac{\varepsilon_0 V^2}{2d^2}\cdot\dfrac{S_1 S_2{}^2}{(S_1+S_2)^2}$

同様にして，$F_2 = \dfrac{\varepsilon_0 V^2}{2d^2}\cdot\dfrac{S_1{}^2 S_2}{(S_1+S_2)^2}$

よって，$\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{S_2}{S_1}$ ・・・④

③，④より，$\dfrac{S_1+2S_2}{S_2}=\dfrac{S_2}{S_1}$

ここで，$S_1=kS_2$ とすると，$k+2=\dfrac{1}{k}$　　$\therefore k^2+2k-1=0$

$k>0$ より，$k=-1+\sqrt{2}$

補足：$\dfrac{F_1}{F_2}=\dfrac{S_2}{S_1}$　・・・④の別解

極板に蓄えられた電荷の大きさを Q，極板③がつくる電界の強さを E_1 とすると，

$E_1=\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S_1}$ だから，$F_1=QE_1=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S_1}$

同様にして，$F_2=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S_2}$

よって，$\dfrac{F_1}{F_2}=\dfrac{S_2}{S_1}$　　・・・④

$\boxed{\text{ヘ}}$

$F_2=pS_2g$，$F_2=\dfrac{\varepsilon_0 V^2}{2d^2}\cdot\dfrac{S_1{}^2S_2}{(S_1+S_2)^2}$ より，$pS_2g=\dfrac{\varepsilon_0 V^2}{2d^2}\cdot\dfrac{S_1{}^2S_2}{(S_1+S_2)^2}$

$$\begin{aligned}\therefore V^2&=\frac{2pgd^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{S_1+S_2}{S_1}\right)^2\\&=\frac{2pgd^2}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{S_2}{S_1}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore V&=\left(1+\frac{S_2}{S_1}\right)d\sqrt{\frac{2pg}{\varepsilon_0}}\\&=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)d\sqrt{\frac{2pg}{\varepsilon_0}}\\&=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)d\sqrt{\frac{2pg}{\varepsilon_0}}\\&=2\left(\sqrt{2}+1\right)d\sqrt{\frac{pg}{\varepsilon_0}}\end{aligned}$$

(3)

ト $\frac{1}{k}\left(\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}+pSg\right)$　チ $\frac{q^2}{2k\varepsilon_0 S}$　リ $\frac{q^2}{2k\varepsilon_0 S}$　ヌ $2\pi\sqrt{\frac{pS}{k}}$

解説

ト

極板⑨が極板⑩から受ける静電気力と極板⑨に働く重力 pSg の和と
極板⑨がばねから受けるばねの復元力がつり合っている。
極板⑨が極板⑩から受ける静電気力の大きさは,

極板⑩がつくる電界の強さは $\frac{q}{2\varepsilon_0 S}$ だから, $q\cdot\frac{q}{2\varepsilon_0 S}=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$

よって，ばねの自然長からの伸びを l とすると,

極板⑩にはたらく力のつり合いの式は $kl=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}+pSg$　$\therefore l=\frac{1}{k}\left(\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}+pSg\right)$

チ

コンデンサーの放電により極板⑨と⑩の電荷が 0 になるから,
振動中心は極板⑨に働く重力とばねの復元力がつり合う位置である。

このときのばねの自然長からの伸びを l_0 とすると, $kl_0=pSg$　$\therefore l_0=\frac{pSg}{k}$

よって，振動中心は最初の位置から

$$l-l_0=\frac{1}{k}\left(\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}+pSg\right)-\frac{pSg}{k}$$
$$=\frac{q^2}{2k\varepsilon_0 S}$$

だけ上方にある。

リ

最初の位置（スイッチを閉じる前）の運動エネルギーは 0 だから,
最初の位置は振動端である。
よって，振幅は

$$l-l_0=\frac{1}{k}\left(\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}+pSg\right)-\frac{pSg}{k}$$
$$=\frac{q^2}{2k\varepsilon_0 S}$$

ヌ

極板⑨の加速度を a，ばねの自然長の位置を $x=0$ とし，x 軸を鉛直下向きにとると，その運動方程式は

$$\begin{aligned} ma &= -kx + pSg \\ &= -k\left(x - \frac{pSg}{k}\right) \end{aligned}$$

よって，極板⑨は $x = \dfrac{pSg}{k}$ を振動中心に周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{pS}{k}}$ で単振動する。

問 1

極板⑧を静止させておけなくなるのは，極板間の引力を最も小さくしても，すなわち 0 にしても

ばねの上向きの弾性力の大きさが極板⑧の重力より大きくなるときである。

よって，ばねの上向きの弾性力の大きさが極板⑧の重力以下になるように q を設定すればよい。

下図より，振動上端が自然長の位置より上にあるとき，

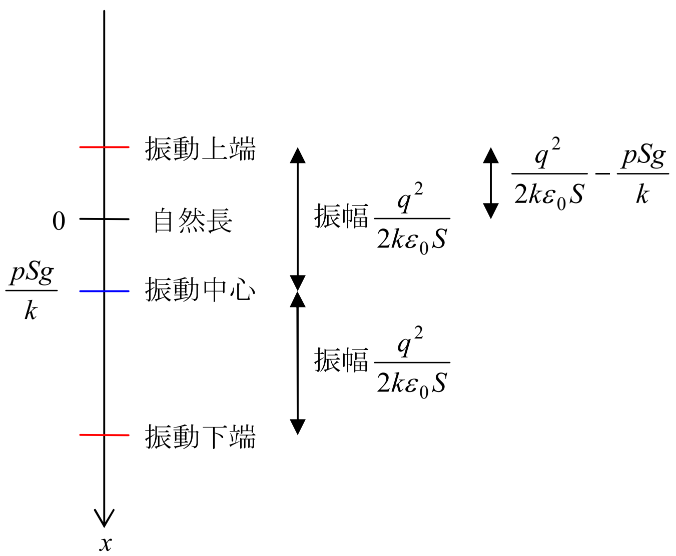
振動上端は自然長より $\dfrac{q^2}{2k\varepsilon_0 S} - \dfrac{pSg}{k}$ だけ縮む。

したがって，極板⑨が振動上端に達したときのばねが極板⑧を上に押す弾性力の大きさは

$$k\left(\frac{q^2}{2k\varepsilon_0 S} - \frac{pSg}{k}\right) = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} - pSg$$

これが極板⑧の重力以下であればよいから，満たすべき式は $\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S} - pSg \le pSg$

$\therefore q \le 2S\sqrt{\varepsilon_0 pg}$ ・・・(答)



問 2

極板⑧に働く力のつり合いの式

極板⑦がつくる電界の強さは $\dfrac{Q(t)}{2\varepsilon_0 S}$ だから，

極板⑧が極板⑦から受ける静電気力の大きさは $\dfrac{Q(t)^2}{2\varepsilon_0 S}$

よって，ばねの自然長の位置を $x=0$ とし，x 軸を鉛直下向きにとると，

極板⑧に働く力のつり合いの式は $\dfrac{Q(t)^2}{2\varepsilon_0 S} = kx + pSg \quad \therefore Q(t)^2 = 2\varepsilon_0 S(kx + pSg)$ ・・・①

極板⑨の単振動運動の式

極板⑨の振動中心は $x = \dfrac{pSg}{k}$ だから，その振動中心からの変位は $x - \dfrac{pSg}{k}$ と表される。

$\boxed{\text{ヌ}}$ より振動の周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{pS}{k}}$ ，$\boxed{\text{リ}}$ より振幅は $\dfrac{q^2}{2k\varepsilon_0 S}$

よって，初期位相を α とすると，

$$x - \frac{pSg}{k} = \frac{q^2}{2k\varepsilon_0 S}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$$

$$= \frac{q^2}{2k\varepsilon_0 S}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{pS}}t + \alpha\right)$$

ここで，$t=0$ のとき $x - \dfrac{pSg}{k} = \dfrac{q^2}{2k\varepsilon_0 S}$ だから，$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore x = \frac{pSg}{k} + \frac{q^2}{2k\varepsilon_0 S}\cos\sqrt{\frac{k}{pS}}t \quad ・・・②$$

関数 $Q(t)$ の式

②を①に代入すると，

$$Q(t)^2 = 2\varepsilon_0 S\left(pSg + \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}\cos\sqrt{\frac{k}{pS}}t + pSg\right)$$

$$= 4\varepsilon_0 pS^2 g + q^2\cos\sqrt{\frac{k}{pS}}t$$

よって，$Q(t) = \sqrt{4\varepsilon_0 pS^2 g + q^2\cos\sqrt{\dfrac{k}{pS}}t}$ ・・・(答)

物理問題　Ⅲ

$\boxed{あ}$ $\dfrac{2P_0V_0}{RT_0}$　$\boxed{い}$ $\dfrac{P_0V_0}{RT_0}$

解説

$\boxed{あ}$・$\boxed{い}$

領域 A，領域 B の気体の物質量をそれぞれ $n_{\mathrm{A}}, n_{\mathrm{B}}$ とすると，

理想気体の状態方程式より，$n_{\mathrm{A}} = \dfrac{2P_0V_0}{RT_0}$，$n_{\mathrm{B}} = \dfrac{P_0V_0}{RT_0}$

(1)

$\boxed{う}$ $\dfrac{5}{4}P_0V_0$　$\boxed{え}$ $\dfrac{1}{2}P_0V_0$　$\boxed{お}$ $\dfrac{7}{4}P_0V_0$　$\boxed{か}$ R　$\boxed{き}$ $\dfrac{5}{3}$　$\boxed{く}$ $\dfrac{7}{5}$

解説

$\boxed{う}$

$C_{\mathrm{v}} = \dfrac{5}{2}R$，気体の物質量$=\dfrac{P_0V_0}{RT_0}$ だから，

内部エネルギー変化を ΔU_{B1} とすると，$\Delta U_{\mathrm{B1}} = \dfrac{P_0V_0}{RT_0}\cdot\dfrac{5}{2}R\cdot\left(2T_0 - \dfrac{3}{2}T_0\right) = \dfrac{5}{4}P_0V_0$

$\boxed{え}$

定圧変化である。変化後の体積を V_{B1} とすると，

$\mathrm{B}_0\left(P_0, \dfrac{3}{2}V_0, n_{\mathrm{B}}, \dfrac{3}{2}T_0\right) \to \mathrm{B}_1\left(P_0, V_{\mathrm{B1}}, n_{\mathrm{B}}, 2T_0\right)$ より，$\dfrac{\frac{3}{2}V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \dfrac{V_{\mathrm{B1}}}{2T_0}$　$\therefore V_{\mathrm{B1}} = 2V_0$

よって，気体がした仕事を W_{B1} とすると，$W_{\mathrm{B1}} = P_0\left(2V_0 - \dfrac{3}{2}V_0\right) = \dfrac{1}{2}P_0V_0$

$\boxed{お}$

吸収した熱量（熱エネルギー）を Q_{B1} とすると，

$$Q_{\mathrm{B1}} = \Delta U_{\mathrm{B1}} + W_{\mathrm{B1}} = \frac{5}{4}P_0V_0 + \frac{1}{2}P_0V_0 = \frac{7}{4}P_0V_0$$

$\boxed{き}$

$$C_{\mathrm{P}} = C_{\mathrm{V}} + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R \qquad \therefore \frac{C_{\mathrm{P}}}{C_{\mathrm{V}}} = \frac{5}{3}$$

$\boxed{く}$

$$C_{\mathrm{P}} = C_{\mathrm{V}} + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R \qquad \therefore \frac{C_{\mathrm{P}}}{C_{\mathrm{V}}} = \frac{7}{5}$$

(2)

$\boxed{\text{け}}$ $2^{1-\frac{1}{\alpha}}V_0$

解説

仕切板 D がストッパーに接触するまで領域 B は等温変化するから，

このときの圧力を P_{B2} とすると，$B_1(P_0, 2V_0, n_B, 2T_0) \to B_2(P_{B2}, V_0, n_B, 2T_0)$ より，

$P_0 \cdot 2V_0 = P_{B2} \cdot V_0 \quad \therefore P_{B2} = 2P_0$

仕切板 D がストッパーに接触した瞬間ピストン W を停止するから，

ストッパーと仕切板の間の垂直抗力は 0 である。

よって，領域 A の圧力は P_{B2} と等しい。すなわち $2P_0$ である。

また，このときの領域 A の体積を V_{A1}，温度を T_{A1} とすると，

$A_0(P_0, 2V_0, n_A, T_0) \to A_1(2P_0, V_{A1}, n_A, T_{A1})$

領域 A の変化は断熱変化だから，$P_0(2V_0)^\alpha = 2P_0 {V_{A1}}^\alpha \quad \therefore {V_{A1}}^\alpha = \dfrac{(2V_0)^\alpha}{2}$

よって，$V_{A1} = \dfrac{2V_0}{2^{\frac{1}{\alpha}}} = 2^{1-\frac{1}{\alpha}}V_0$

問 1

領域 A と領域 B を合わせた系で考える。

領域 A の内部エネルギー変化を ΔU_A，領域 B の内部エネルギー変化を ΔU_B，

系が外力に対してした仕事を W_1，系が大気に対してした仕事を W_2

また，領域 A が領域 B にした仕事と領域 B が領域 A にした仕事は相殺されるから，

熱力学第一法則の式は

$-Q = \Delta U_A + \Delta U_B + W_1 + W_2$ ・・・①

となる。

ΔU_A について

領域 A の気体は，定積モル比熱より，単原子分子であるから，$U = \dfrac{3}{2}nRT$ で与えられる。

領域 A の気体の物質量を n_A，変化後の領域 A の温度を T_{A1} とすると，

変化前の内部エネルギー

$\dfrac{3}{2}n_A RT_0 = \dfrac{3}{2}P_0 \cdot 2V_0 = 3P_0V_0$ ・・・②

変化後の内部エネルギー

領域 B の体積は操作(1)の定圧変化で $2V_0$ になる。

その後，仕切板 D がストッパーに接触するまで領域 B は等温変化するから，

このときの領域 B の圧力を P_{B2} とすると，$B_1(P_0, 2V_0, n_B, 2T_0) \to B_2(P_{B2}, V_0, n_B, 2T_0)$ より，

$P_0 \cdot 2V_0 = P_{\mathrm{B2}} \cdot V_0 \quad \therefore P_{\mathrm{B2}} = 2P_0$

また，仕切板 D がストッパーに接触した瞬間ピストン W を停止するから，ストッパーと仕切板の間の垂直抗力は 0 である。

したがって，変化後の領域 A の圧力は P_{B2} と等しい。すなわち $2P_0$ である。

よって，変化後の内部エネルギーは

$$\frac{3}{2}n_{\mathrm{A}}RT_{\mathrm{A1}} = \frac{3}{2}\cdot 2P_0 \cdot 2^{1-\frac{1}{\alpha}}V_0 = 3\cdot 2^{1-\frac{1}{\alpha}}P_0V_0 \quad ・・・③$$

②，③より，

$$\Delta U_{\mathrm{A}} = 3\cdot 2^{1-\frac{1}{\alpha}}P_0V_0 - 3P_0V_0 = 3P_0V_0\left(2^{1-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \quad ・・・④$$

ΔU_{B} について

領域 B は等温変化だから， $\Delta U_{\mathrm{B}} = 0 \quad ・・・⑤$

W_2 について

変化前の系全体の体積 $= 2V_0 + 2V_0$

変化後の系全体の体積 $= 2^{1-\frac{1}{\alpha}}V_0 + V_0$

よって，系が大気に対してした仕事は

$$W_2 = P_0\left\{2^{1-\frac{1}{\alpha}}V_0 + V_0 - (2V_0 + 2V_0)\right\} = -P_0V_0\left(3 - 2^{1-\frac{1}{\alpha}}\right) \quad ・・・⑥$$

④，⑤，⑥を①に代入すると，

$$-Q = 3P_0V_0\left(2^{1-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) + 0 + \left\{-P_0V_0\left(3 - 2^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)\right\} + W_2$$

外力が系にした仕事は $-W_1$ だから，

$$\begin{aligned}-W_1 &= Q + 3P_0V_0\left(2^{1-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) - P_0V_0\left(3 - 2^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)\\ &= Q + P_0V_0\left(4\cdot 2^{1-\frac{1}{\alpha}} - 6\right)\\ &= Q + \left(2^{3-\frac{1}{\alpha}} - 6\right)P_0V_0\end{aligned}$$

よって， $Q + \left(2^{3-\frac{1}{\alpha}} - 6\right)P_0V_0$

(3)

$\boxed{こ}$ $2^{\alpha}P_0$

解説

求める圧力を P_{A2} とすると，最初の領域 A の圧力と体積 $P_0, 2V_0$ が，

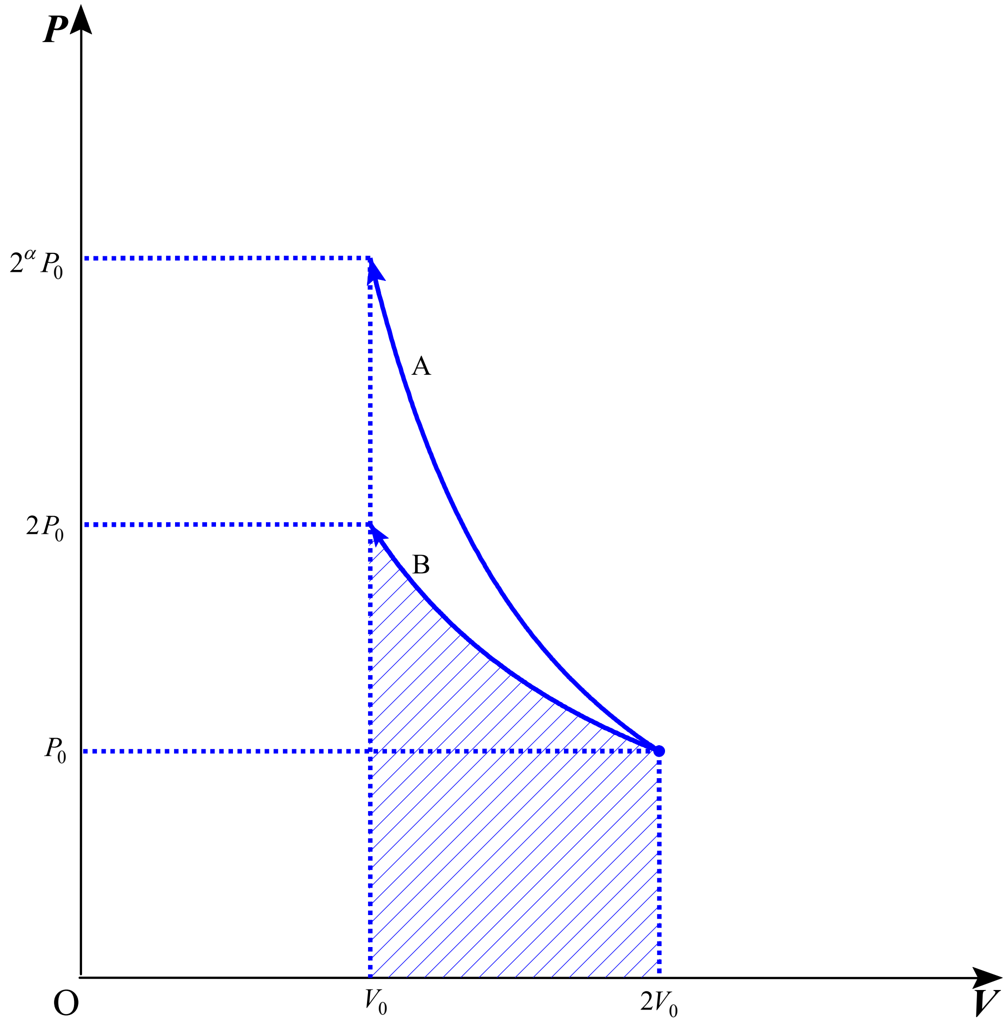
断熱変化により，P_{A2}, V_0 になったから，$P_0(2V_0)^{\alpha} = P_{A2}V_0^{\alpha}$ より，$P_{A2} = 2^{\alpha}P_0$

問 2

領域 A は $PV^{\alpha} = P_0(2V_0)^{\alpha}$ （$V_0 \leq V \leq 2V_0$，$\alpha = \dfrac{5}{3}$）で表される断熱変化であり，

変化の方向は $(P_0, 2V_0) \to (2^{\alpha}P_0, V_0)$

領域 B は $PV = 2P_0V_0$ （$V_0 \leq V \leq 2V_0$）で表される等温変化であり，
変化の方向は $(P_0, 2V_0) \to (2P_0, V_0)$



(4)

$\boxed{\text{さ}}$ $2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0$ $\boxed{\text{し}}$ ① $\boxed{\text{す}}$ ②

解説

$\boxed{\text{さ}}$

ストッパーから離れかけた瞬間の圧力と体積は $2^{\alpha}P_0$，V_0

領域 A の気体の圧力が大気圧 P_0 と等しくなったとき領域 B の気体の圧力も P_0 になる。

この体積を V_{B2} とすると，$2^{\alpha}P_0V_0{}^{\beta} = P_0V_{B2}{}^{\beta}$ $\quad \therefore V_{B2} = 2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0$

$\boxed{\text{し}}$

領域 A の変化は常に断熱変化だから，その圧力が大気圧 P_0 と等しくなったとき，
領域 A は最初の状態に戻る。よって，このときの領域 A の体積は $2V_0$

$\alpha = \frac{5}{3}$，$\beta = \frac{7}{5}$ より，$\alpha > \beta$ $\quad \therefore \frac{\alpha}{\beta} > 1$

ゆえに，$2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0 > 2V_0$

$\boxed{\text{す}}$

PV グラフで考えると，

領域 A の気体は，$PV^{\alpha} = 2^{\alpha}P_0V_0{}^{\alpha}$ （$V_0 \le V \le 2V_0$，$\alpha = \frac{5}{3}$）を，

すなわち $P = 2^{\alpha}P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\alpha}$ （$V_0 \le V \le 2V_0$，$\alpha = \frac{5}{3}$）を満たしながら，

$\left(2^{\alpha}P_0, V_0\right)$ から $\left(P_0, 2V_0\right)$ へ断熱変化する。

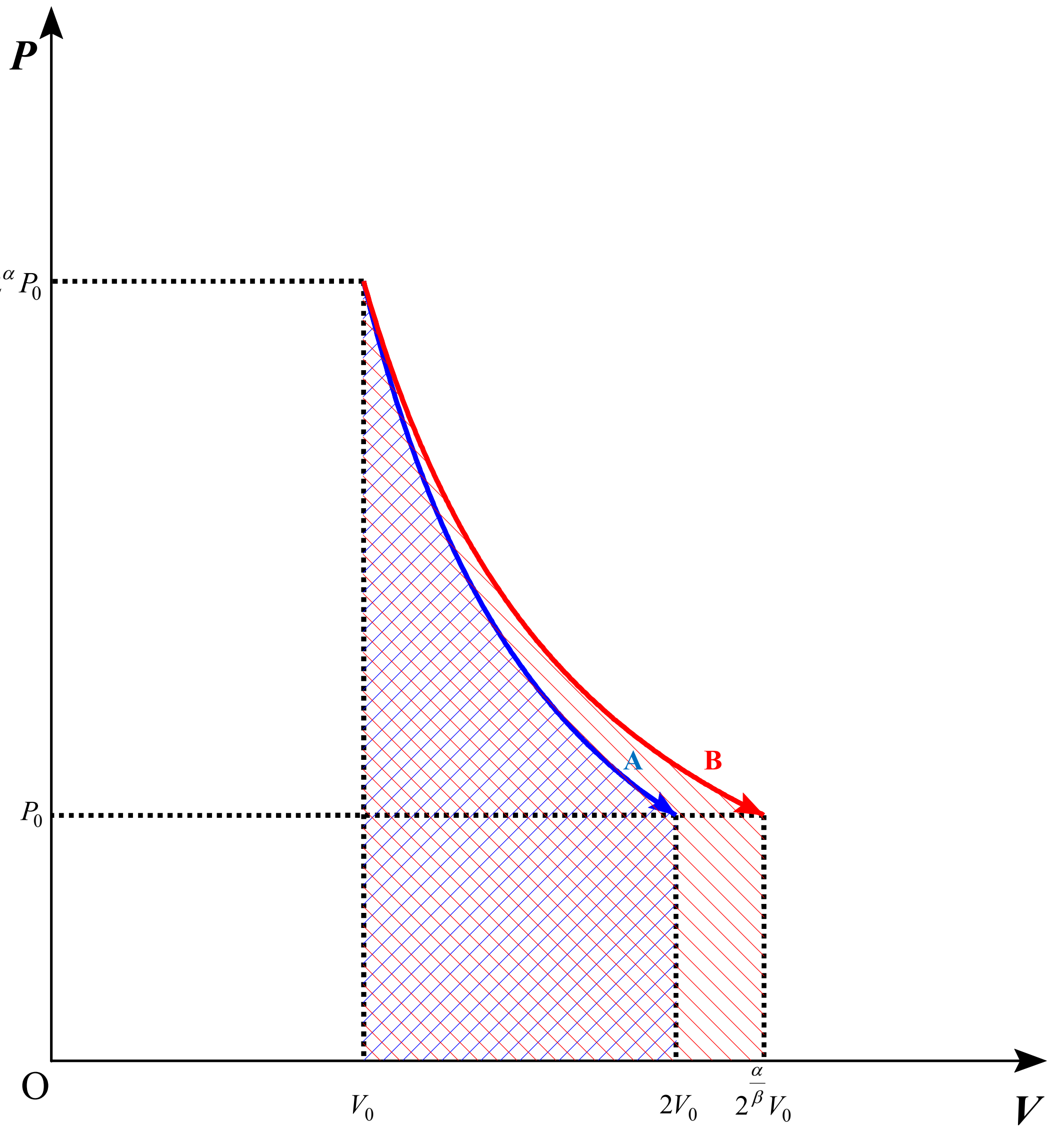
領域 B の気体は，$PV^{\beta} = 2^{\alpha}P_0V_0{}^{\beta}$ （$V_0 \le V \le 2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0$，$\alpha = \frac{5}{3}$，$\beta = \frac{7}{5}$）を，

すなわち $P = 2^{\alpha}P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\beta}$ （$V_0 \le V \le 2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0$，$\alpha = \frac{5}{3}$，$\beta = \frac{7}{5}$）を満たしながら

$\left(2^{\alpha}P_0, V_0\right)$ から $\left(P_0, 2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0\right)$ へ断熱変化する。

始点は両方とも $\left(2^{\alpha}P_0, V_0\right)$，$V$ が同じ値のとき $2^{\alpha}P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\alpha} < 2^{\alpha}P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\beta}$，$2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0 > 2V_0$

より，領域 A の気体がした仕事に相当する面積は領域 B のより小さい。



補足

定量的解法ではどうか？

領域 A の気体のした仕事を W_A，内部エネルギー変化を ΔU_A

領域 B の気体のした仕事を W_B，内部エネルギー変化を ΔU_B とすると，

$0 = \Delta U_A + W_A \quad \therefore W_A = -\Delta U_A$

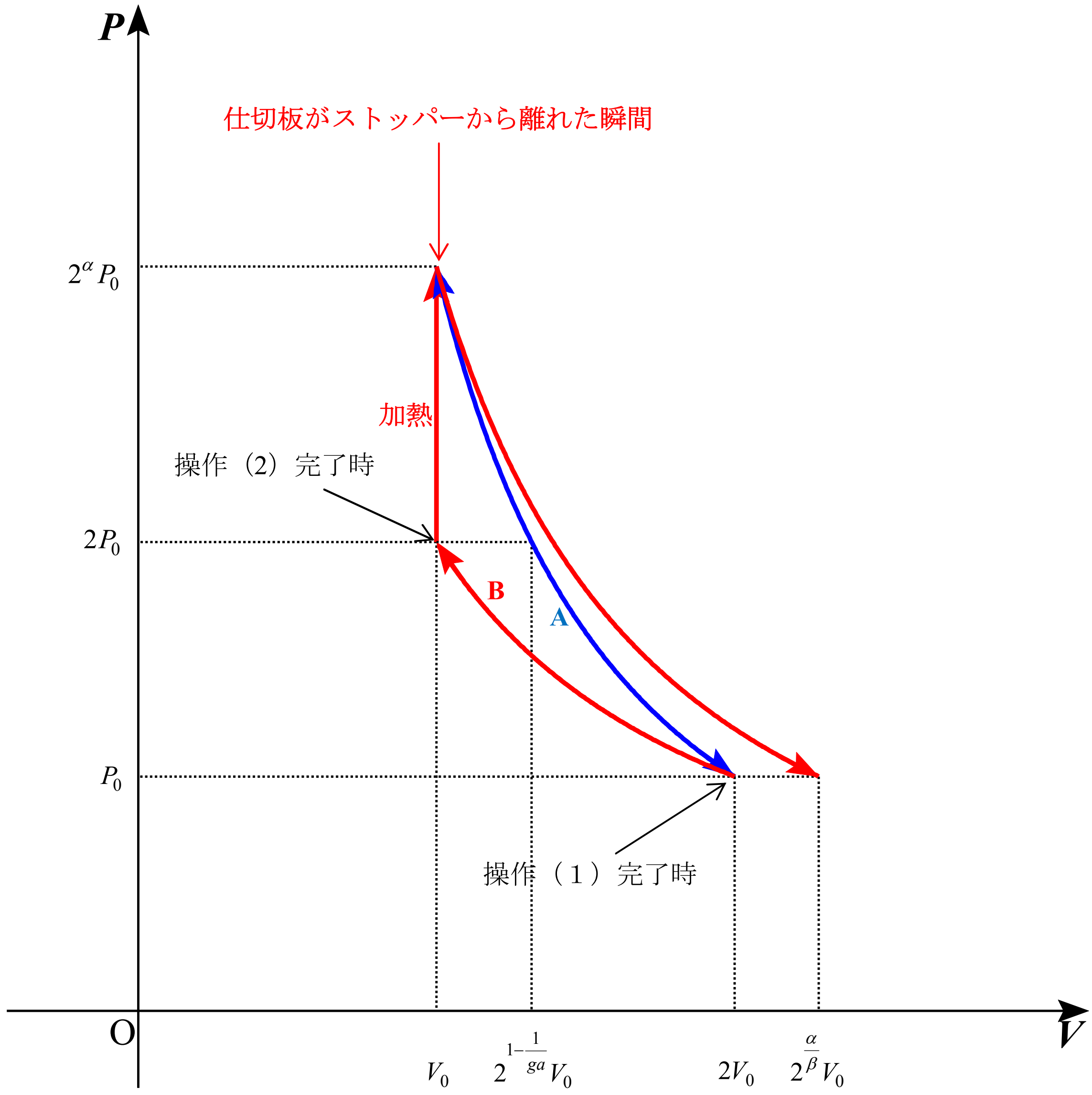
$0 = \Delta U_B + W_B \quad \therefore W_B = -U_B$

$$-\Delta U_A = -\frac{3}{2}\left(P_0 \cdot 2V_0 - 2^{\alpha}P_0 \cdot V_0\right) = \frac{3}{2}\left(2^{\alpha} - 2\right)P_0V_0$$

$$-\Delta U_B = -\frac{5}{2}\left(P_0 \cdot 2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0 - 2^{\alpha}P_0 \cdot V_0\right) = \frac{5}{2}\left(2^{\alpha} - 2^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)P_0V_0$$

関数電卓で計算すると，$W_A < W_B$ となるが，これは無理っぽい

参考図



P
V
O
仕切板がストッパーから離れた瞬間
加熱
操作（2）完了時
操作（1）完了時
A
B
$2^{\alpha}P_0$
$2P_0$
P_0
V_0
$2^{1-\frac{1}{g\alpha}}V_0$
$2V_0$
$2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0$